

DISTANCIA DE VIAJE, DISEÑO Y TARIFAS ÓPTIMAS EN TRANSPORTE PÚBLICO

Sergio Jara-Díaz*^o (jaradiaz@ing.uchile.cl), Antonio Gschwender*^o (agschwen@yahoo.com), Juan Cristóbal Castro* (juancricastro8@gmail.com) y Matías Lepe* (matias.lepe@ing.uchile.cl).

*Universidad de Chile, ^oInstituto Sistemas Complejos de Ingeniería (ISCI)

RESUMEN

Los usuarios de transporte público que recorren distancias más largas inducen recorridos de mayor costo. Quienes viajan distancias cortas aumentan el tiempo de viaje de los primeros. En ambos casos, se afecta el costo total de operadores y usuarios, impactando las tarifas óptimas en direcciones opuestas. Se formula un modelo estilizado sobre un corredor con usuarios idénticos que viajan distintas distancias, obteniendo el diseño estratégico óptimo (frecuencia, tamaño de vehículo y largo de ruta) y las tarifas óptimas, considerando hacinamiento. Se obtienen tarifas que crecen con la distancia a tasas decrecientes, resultado que depende crucialmente del factor de hacinamiento.

Palabras clave: transporte público, tarifas por distancia, efecto hacinamiento.

ABSTRACT

Transit users who travel longer distances induces more expensive routes. Those who travel shorter distances increase the travel time for the former. In both cases, the total cost (operators and users) increases, affecting optimal prices in opposite directions. A stylized model is formulated for a corridor with identical users traveling different distances, obtaining the optimal strategic design (frequency, vehicle size, and route length) and optimal fares, considering crowding. Fares that increase with distance at decreasing rates are obtained, a result that crucially depends on the congestion factor.

Keywords: public transport, distance related fares, crowding effect.

1. INTRODUCCIÓN

Las tarifas óptimas en transporte público resultan de sustraer el costo de los usuarios (su tiempo) del costo marginal total. En el clásico modelo de línea aislada, los usuarios viajan la misma distancia y se obtiene una sola tarifa pues costos marginales totales y medios de usuarios son los mismos para todos (Mohring, 1972; Turvey and Mohring, 1975; Jansson, 1980; Jara-Díaz and Gschwender, 2003). Al considerar diferencias en las distancias viajadas por los usuarios aparecen dos efectos: Por un lado, los usuarios que viajan largas distancias inducen un mayor largo de ruta, aumentando el costo de los operadores; por otro, las subidas y bajadas de aquellos usuarios que viajan distancias cortas inducen un mayor tiempo en el vehículo para aquellos que están a bordo, causando una externalidad negativa al aumentar el costo de los usuarios. Por ende, no es evidente si las tarifas óptimas crecerán, decrecerán o no variarán con la distancia viajada por cada usuario.

En este artículo enfrentamos ese desafío usando el esquema de Kraus (1991) de un bus en una línea aislada que recorre de la periferia al CBD donde todos los pasajeros descienden; conservamos esta representación simple, pero la usamos para encontrar el diseño óptimo del sistema considerando no solo frecuencia y capacidad (como en Jansson 1979, 1980; and Jara-Díaz and Gschwender, 2003), sino también la longitud del servicio (número de paradas servidas). La tasa de ocupación de cada vehículo (factor de carga) es considerado un elemento que influye en el valor del tiempo en el vehículo, el que aumenta con el hacinamiento. Apuntamos al cálculo de las tarifas *first-best* derivando los costos marginales considerando como función de costo el valor de total de los recursos consumidos óptimo – por operadores y usuarios – para una estructura de demanda dada. Mostramos que los costos marginales y las tarifas óptimas dependen de dónde abordan los pasajeros. Las tarifas óptimas resultan ser crecientes a tasas decrecientes con la distancia para diferentes distribuciones de demanda, teniéndose que las tarifas óptimas cubren gran parte de los costos. Además, los viajes muy cortos son tarificados cercanos a cero. Se muestra que el hacinamiento es el principal causante de este resultado, ya que, cuando no se considera, las tarifas óptimas son prácticamente constantes a lo largo del corredor.

En lo que sigue de esta sección, resumimos la literatura acerca de la relación entre tarifas y distancia de viaje. En la sección 2 formulamos el modelo y el enfoque general para obtener diseño y tarifas óptimos. En la sección 3 derivamos las condiciones de optimalidad para dos casos dependientes de si la capacidad del sistema es mayor o igual a la demanda total. En la sección 4 obtenemos el diseño óptimo y las tarifas numéricamente para tres distribuciones de demanda (creciente, decreciente y constante a lo largo del corredor) usando parámetros tipo Santiago de Chile. La relevancia del rol del hacinamiento es examinada en la sección 5. La sección 6 concluye.

Considerando el impacto en el corto plazo sobre el costo de los operadores, Cervero (1981) argumenta que la tarifa óptima debe crecer con la distancia de viaje. Por el contrario, en un modelo de línea troncal que considera costos de operadores u usuarios, donde todos los pasajeros descienden en la parada final, Mohring (1972) mostró que el tiempo de subida de los pasajeros que viajan distancias cortas causa una demora adicional en los pasajeros de larga distancia quienes ya se encuentran a bordo, lo que resulta en mayores tarifas para los usuarios de corta distancia. Posteriormente, Turvey y Mohring (1975) argumentan que el factor clave no es la distancia viajada, sino que el nivel de ocupación del vehículo durante el viaje. A mayor ocupación cuando los pasajeros abordan, más afectados serán el resto de los pasajeros (como se mostro por Mohring, 1972); y a mayor ocupación durante el viaje, mayor será la probabilidad de que otros pasajeros no sean capaces de abordar el vehículo, lo que aumentará el tiempo de espera. Este último efecto puede estar relacionado positivamente con la distancia de viaje. Kraus (1991) propone un modelo consistente en una línea única que sirve viajes desde varios orígenes a un único destino a través de un corredor. A diferencia del modelo de una línea con demanda homogénea, en el modelo de Kraus las variables de diseño no son optimizadas pero el efecto de la distancia sobre la tarifa es examinado considerando frecuencia, capacidad y paradas servidas como dadas; el observa que el impacto marginal de un pasajero adicional sobre el tiempo de viaje de todo el resto debido al tiempo adicional de subida y bajada (como en Mohring, 1972; y Turvey y Mohring, 1975) y debido al aumento en el valor del tiempo cuando el bus va lleno y los pasajeros deben viajar de pie. Qin (2014) expande el modelo de Kraus optimizando el diseño considerando el hacinamiento mediante diferentes formas analíticas; el concluye que el hacinamiento podría contrabalancear el efecto Mohring (sin embargo, las tarifas no son discutidas). Huang et al (2016) compara tres estructuras tarifarias: plana, basada en distancia y basada en origen-destino. Usando una estructura de línea

dada que incluye la asignación de pasajeros, en cada caso tarifas y frecuencias son optimizadas numéricamente obteniendo que el bienestar social es mínimo para el esquema de tarifa plana; en las otras dos estructuras las tarifas aumentan con la distancia de viaje. Desde una perspectiva *second-best*, Kerin (1992) argumenta que existe otro elemento a favor de tarifas mayores para viajes de mayor distancia y es su menor elasticidad precio de la demanda debido a que hay menos competencia modal (caminata y bicicleta no son una opción) y porque el tiempo de viaje se vuelve más importante que el valor de la tarifa, combinado con la tarificación Ramsey. Desde otro ángulo, Jørgensen and Pedersen (2004) examinan la sensibilidad de una tarifa plana a la distancia de viaje promedio de los usuarios, concluyendo que depende del objetivo del operador (para máximo bienestar la tarifa plana aumenta con la distancia promedio de viaje). Notar que en todos los casos el análisis ha sido hecho en servicios con largos de ruta dados.

2. FORMULACIÓN DEL MODELO: DE DISEÑO A TARIFICACIÓN

Consideramos una ciudad monocéntrica lineal donde $Y = \sum y_i$ pax/hr viajan desde Γ paradas equiespaciadas en l hacia el CBD con y_i el número de pax/hr que abordan en i . Los pasajeros usan buses que circulan desde una de las paradas hacia el CBD. El problema es encontrar la frecuencia f , tamaño de buses K y parada R (longitud de ruta) óptimos, tales que el valor total de los recursos consumidos por usuarios (su tiempo) y operadores VRC es minimizado. En la figura 1 R es la parada que determina el largo de ruta; \bar{Y}_i es el número total de pasajeros que viajan en cada arco i como se define en la ecuación (1); la ocupación por vehículo es $k_i = \bar{Y}_i/f$. Los pasajeros ubicados entre $R + 1$ y Γ deben caminar hacia R . Evidentemente existe un compromiso entre los costos de operadores y usuarios, debido a que aumentar R implica mayor tiempo de ciclo, pero menor tiempo de acceso (caminata). Trivialmente, sólo en el arco 1, adyacente al CBD, el flujo a bordo de los vehículos es igual a Y ($\bar{Y}_1 = Y$).

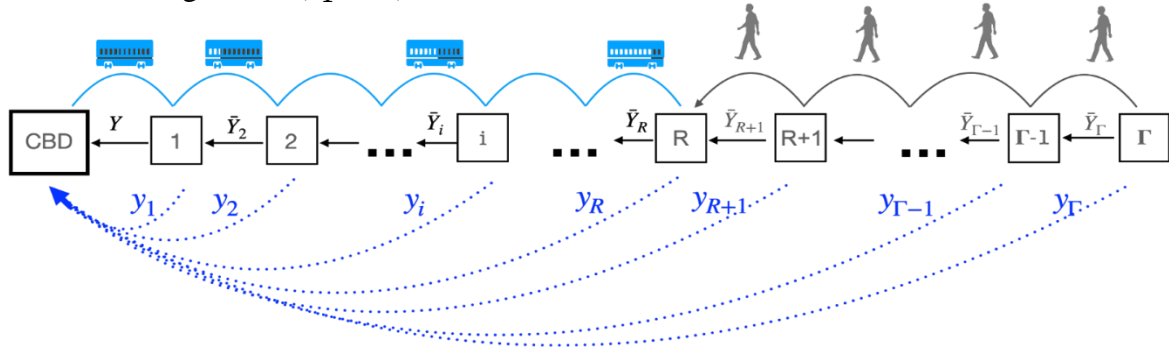


Figura 1. Servicio de buses desde la parada R hacia el CBD.

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=i}^{\Gamma} y_j \quad (1)$$

La ecuación (2) representa el valor total de los recursos consumidos por hora por operadores C_{op} y usuarios C_u . Los recursos contribuidos por los usuarios - su tiempo - tienen tres componentes: costo en vehículo (C_v), espera (C_w) y caminata (C_a).

$$VRC = C_{op} + C_u = C_{op} + C_v + C_w + C_a \quad (2)$$

Consideremos una flota de buses de capacidad K con costos de operación $c(K)$ por veh/hora (incluyendo adquisición), que operan con frecuencia f y tiempo de ciclo t_c . La flota total es $t_c f$ y el costo de los operadores C_{op} es

$$C_{op} = c(K)t_c f \quad (3)$$

Siguiendo a Jansson (1984) y otros, $c(K)$ se asumirá lineal en K (ecuación 4), donde c_0 y c_1 son parámetros. El tiempo de ciclo está dado por la ecuación (5), incluyendo el tiempo de viaje en ambas direcciones en todos los arcos entre paradas, más el tiempo total de subida y bajada de todos los pasajeros; v es la velocidad del bus, t_b y t_d son los tiempos medios de subida y bajada, respectivamente. El costo total de los operadores es mostrado en la ecuación (6).

$$c(K) = c_0 + c_1 K \quad (4)$$

$$t_c = 2R \frac{l}{v} + (t_b + t_d) \frac{Y}{f} \quad (5)$$

$$C_{op} = c(K)t_c f = (c_0 + c_1 K) \left[2Rf \frac{l}{v} + (t_b + t_d)Y \right] \quad (6)$$

C_v es la suma sobre todos los arcos del producto del valor unitario del tiempo en el vehículo P_v^i , el tiempo en el vehículo en esa sección t_v^i y la cantidad de pasajeros que han abordado el vehículo hasta ese arco i (\bar{Y}_i en ecuación (1)).

$$C_v = \sum_{i=1}^R P_v^i t_v^i \bar{Y}_i \quad (7)$$

P_v^i es valorado dependiendo del hacinamiento, es decir, de la proporción de pasajeros por bus \bar{Y}_i/Kf que varía dependiendo de la sección de la ruta, según la ecuación (8), donde P_{vc} es un parámetro del hacinamiento y P_{ve} es el valor de referencia para un vehículo vacío (Jansson, 1993; Jara-Díaz y Gschwender, 2003; Tian et al, 2007).

$$P_v^i = P_{ve} + P_{vc} \frac{\bar{Y}_i}{Kf} \quad (8)$$

t_v^i corresponde al tiempo que toma a un pasajero viajar a través de un arco (desde i a $i - 1$) más el tiempo de subida y bajada de pasajeros en la parada $i - 1$ (ecuaciones 9). Notar que en todas las secciones i desde R a 2 solo hay subidas en la parada $i - 1$; los pasajeros viajando en el vehículo deben permanecer en él mientras los pasajeros en la parada $i - 1$ abordan. En la sección adyacente al CBD ($i = 1$), todos descienden (subidas son consideradas en el arco anterior) y el tiempo promedio que cada pasajero permanece en el vehículo durante la bajada es la mitad del tiempo total de bajada. El tiempo de subida en la parada i es incluido en el tiempo de espera.

$$t_v^1 = \frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \quad (9a)$$

$$t_v^i = \frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} = \frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} (\overline{Y}_{i-1} - \overline{Y}_l), \quad 1 < i \leq R \quad (9b)$$

El costo del tiempo en el vehículo puede finalmente escribirse como

$$C_v = \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{Y}{Kf} \right) \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] Y + \sum_{i=2}^R \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{\overline{Y}_l}{Kf} \right) \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \overline{Y}_l \quad (10)$$

C_w es la multiplicación del número total de pasajeros Y , su tiempo de espera t_w y el valor del tiempo de espera P_w (ecuación 11). Para cada pasajero, t_w disminuye con la frecuencia y está dado por ϵ/f donde ϵ es una constante que depende de la distribución con la que arriban vehículos y pasajeros a las paradas.

$$C_w = P_w t_w Y = P_w \frac{\epsilon}{f} Y \quad (11)$$

Finalmente, el tiempo de acceso t_a^i existe sólo para aquellos usuarios que viven entre R y Γ , quienes caminan hacia la parada más cercana R a una velocidad v_a (ecuación 12). Si P_a representa su valor, el costo total de acceso se muestra en la ecuación (13).

$$t_a^i = \begin{cases} 0, & i \leq R \\ \frac{(i-r)l}{v_a}, & R < i \leq \Gamma \end{cases} \quad (12)$$

$$C_a = P_a \left[\sum_{i=R+1}^{\Gamma} y_i (i-R) \frac{l}{v_a} \right] \quad (13)$$

Dados Y y su distribución, el problema de diseño óptimo consiste en encontrar (f^*, K^*, R^*) que minimizan VRC (ecuación 14), sujeto a tener suficiente capacidad para transportar el máximo flujo (ecuación 15) - siempre dado por la sección adyacente al CBD.

$$\text{Min } VRC(f, K, R) = C_{op}(f, K, R) + C_v(f, K, R) + C_w(f) + C_a(R) \quad (14)$$

Sujeto a:

$$Y - Kf \leq 0 \quad (\mu) \quad (15)$$

Donde C_{op} , C_v , C_w y C_a están dados por las ecuaciones (6), (10), (11) y (13) respectivamente y μ es el multiplicador de la restricción de capacidad. Una vez encontradas (f^*, K^*, R^*) , la función de costo total C está dada por

$$C \equiv VRC(f^*, K^*, R^*) = C_{op}(f^*, K^*, R^*) + C_v(f^*, K^*, R^*) + C_w(f^*) + C_a(R^*) \quad (16)$$

de donde los costos marginales totales MgC_i y los costos medios de los usuarios $AvCU_i$ de los pasajeros que suben en la parada i pueden ser obtenidos. La tarifa óptima por distancia P_i^* se obtiene como $P_i^* = MgC_i - AvCU_i$, ya que $AvCU_i$ es el costo que el usuario ya está pagando en tiempo (Jansson, 1979). MgC_i , la derivada de C con respecto a los pasajeros viajando desde i al

CBD, será aproximada como la variación en costos ante una variación unitaria de y_i , manteniendo $R = R^*$, es decir

$$MgC_i \equiv \frac{\partial C}{\partial y_i} \approx \frac{\Delta C}{\Delta y_i} \Big|_{R^*} \quad (17)$$

$AvCU_i$ es el valor total de las componentes de tiempo que experimenta ese usuario. De las ecuaciones (10), (11) y (13)

$$AvCU_i = \sum_{j=1}^{j=R^*} \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{\bar{Y}_j}{K^* f^*} \right) t_v^j + P_w \frac{\epsilon}{f^*} + P_a \frac{(i - R^*)l}{v_a}, \quad R^* < i \leq \Gamma \quad (18a)$$

$$AvCU_i = \sum_{j=1}^{j=i} \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{\bar{Y}_j}{K^* f^*} \right) t_v^j + P_w \frac{\epsilon}{f^*}, \quad i \leq R^* \quad (18b)$$

En ambas ecuaciones t_v^j se obtiene de las ecuaciones (9a) y (9b), y depende sólo de f^* .

El costo marginal de quienes viven entre R^* y Γ tiene una componente por acceso $\frac{lP_a}{v_a}(i - R^*)$ (según ecuación 13), idéntica a su costo medio. Dado que se cancelan, la tarifa óptima para los pasajeros que viven entre R^* y Γ es la misma.

3. CONDICIONES DE OPTIMALIDAD Y LA RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD

El problema general de optimización de diseño - ecuaciones (14), (15), (6), (10), (11) y (13) - contiene una variable discreta (R) y dos consideradas continuas, f y K . Examinemos primero si la restricción de capacidad es activa como en los modelos tradicionales. El efecto de K sobre VRC es

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = \frac{\partial C_{op}}{\partial K} + \frac{\partial C_v}{\partial K} = c_1 \left[2fR \frac{l}{v} + (t_b + t_d)Y \right] - \frac{P_{vc}}{K^2} \left\{ \frac{Y^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] + \sum_{i=2}^R \frac{\bar{Y}_i^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \right\} \quad (19)$$

VRC no necesariamente aumenta con K , es decir, $K > Y/f$ es posible. Notar que si P_{vc} fuese 0 entonces $\frac{\partial VRC}{\partial K} > 0$ haciendo K igual a la mínima necesaria para transportar Y , es decir, $K = Y/f$.

Se trata de buscar f^* y K^* que minimizan VRC para un valor dado de R , obteniendo una función de costo condicional $VRC_C(R)$. R^* es la parada que minimiza $VRC_C(R)$ para $R \in (1, \dots, \Gamma)$. Las condiciones de primer orden (CPO) son

$$\begin{aligned} 2(c_0 + c_1 K)R \frac{l}{v} - P_{vc} t_d \frac{Y^3}{K f^3} - \frac{Y^2}{f^2} \left[\frac{P_{vc}}{K} \frac{l}{v} + \frac{t_d}{2} P_{ve} \right] - P_w \frac{\epsilon}{f^2} Y \\ - \sum_{i=2}^R \left\{ P_{vc} \frac{\bar{Y}_i^2}{K f^2} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] + \frac{t_b}{f^2} y_{i-1} \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{\bar{Y}_i}{K f} \right) \bar{Y}_i \right\} - K\mu = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$c_1 \left[2fR \frac{l}{v} + (t_b + t_d)Y \right] - \frac{P_{vc}}{K^2} \left\{ \frac{Y^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] + \sum_{i=2}^R \frac{\bar{Y}_i^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \right\} - f\mu = 0 \quad (21)$$

$$(Y - Kf)\mu = 0 \quad (22)$$

Hay dos casos. Si la restricción es no-activa, $\mu = 0$ y las ecuaciones (20) y (21) forman un sistema en K y f que resuelve el problema para un R dado. El sistema no tiene solución analítica en K y f pero puede ser resolverse de manera numérica. R^* es el mínimo de $VRC(f^*(R), K^*(R), R)$.

Si la restricción es activa, entonces $Kf = Y$ y podemos reanalizar el problema (14)-(15) cuando esto es impuesto. En este caso el factor de carga es a igual a \bar{Y}_i/Y constante para cada arco, para una distribución de demanda dada, y tanto $P_v^i = P_{ve} + P_{vc}\bar{Y}_i/Y$ como $P_v^1 = P_{ve} + P_{vc}$ son independientes de f y K . De las ecuaciones (6) y (10) tenemos

$$C_{op}(f, R) = \left(c_0 + c_1 \frac{Y}{f} \right) \left[2Rf \frac{l}{v} + (t_b + t_d)Y \right] \quad (23)$$

$$C_v(f, R) = (P_{ve} + P_{vc})Y \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] + \sum_{i=2}^R \left(P_{ve} + P_{vc} \frac{\bar{Y}_i}{Y} \right) \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \bar{Y}_i \quad (24)$$

lo que convierte a VRC una función sólo de f y R , como se muestra en la ecuación (25).

$$VRC(f, R) = C_{op}(f, R) + C_v(f, R) + C_w(f) + C_a(R) \quad (25)$$

Para un R dado y considerando las ecuaciones (23), (24) y (11), la CPO en f conduce a

$$f^* = \sqrt{\frac{Y^2 \left[\frac{t_d}{2} P_v^1 + c_1(t_b + t_d) \right] + \sum_{i=2}^R P_v^i \bar{Y}_i t_b y_{i-1} + P_w \epsilon Y}{2c_0 R \frac{l}{v}}} \quad y \quad K = \frac{Y}{f^*} \quad (26)$$

Reemplazando $f^*(R)$ en (25) se obtiene $VRC(R; f^*(R))$. La parada óptima R^* resulta de $R^* = \{\bar{R} | VRC(\bar{R}; f^*(\bar{R})) \leq VRC(R; f^*(R)) \forall R \in [1, \Gamma]\}$.

En síntesis, existen dos posibles soluciones dependientes de la restricción de capacidad. Si es inactiva, el diseño óptimo está dado por las ecuaciones (20) y (21) con $\mu = 0$. Si es activa, la solución está comandada por la expresión (26). En ambos casos R^* se encuentra paramétricamente.

4. APLICACIÓN CONSIDERANDO TRES DISTRIBUCIONES DE DEMANDA

La distribución de demanda será modelada de forma lineal según la ecuación (27), con $\delta = 1, -1$ o 0 representando demandas creciente, decreciente o constante respecto de los flujos hacia el CBD, respectivamente. El parámetro y es un flujo básico que, en los casos en que $\delta = 1$ o -1 , representa la diferencia entre los flujos entrando al sistema en dos paradas sucesivas.

$$y_i = (\Gamma + 1 - \delta i)y, \quad i = 1, \dots, \Gamma \quad \delta < \Gamma + 1 \quad (27)$$

Bajo esta configuración, la demanda total está dada por

$$Y = \sum_{i=1}^{\Gamma} y_i = \sum_{i=1}^{\Gamma} (\Gamma + 1 - \delta i)y = \Gamma(\Gamma + 1)y \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \quad (28)$$

Como la comparación de las diferentes distribuciones de demanda debe ser hecha para un Y dado se debe imponer que

$$y = \frac{2Y}{\Gamma(\Gamma + 1)} \text{ si } \delta = 1, \quad y = \frac{2Y}{3\Gamma(\Gamma + 1)} \text{ si } \delta = -1, \quad y = \frac{Y}{\Gamma(\Gamma + 1)} \text{ si } \delta = 0 \quad (29)$$

Esto es representado en la figura 2 para $Y = 1860$ pax/hr y $\Gamma = 30$; la pendiente es $-\delta y$.

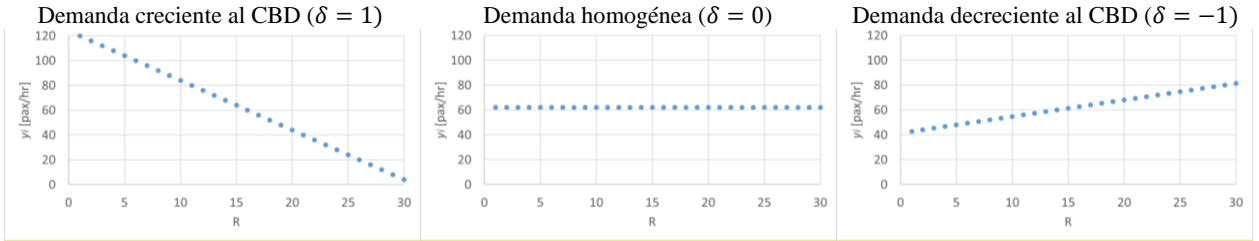


Figura 2. Distribuciones de demanda y_i .

El número de pasajeros a bordo de todos los vehículos en el arco i es

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=i}^{\Gamma} y_j = \sum_{j=i}^{\Gamma} (\Gamma + 1 - \delta j)y = (\Gamma + 1)y(\Gamma - i + 1) - \frac{\delta y}{2}[(\Gamma + 1)\Gamma - (i - 1)i] \quad (30)$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección anterior, los valores óptimos para R , f y K fueron encontrados usando los parámetros mostrados en la tabla 1 para las tres distribuciones de demanda.

Tabla 1. Parámetros para la simulación (ciudad tipo Santiago de Chile).

c_0 US\$/h	c_1 US\$/h	l km	v km/h	t_b s/pax	t_d s/pax	ϵ	P_w US\$/h	P_a US\$/h	v_a km/h	P_{ve} US\$/h	P_{vc} US\$/h	Γ	Y pax/h
8,61	0,3	0,33	18,5	2,5	1	0,7	5,48	8,22	5	0,9	7	30	1860

Fuentes: Jara-Díaz y Muñoz-Paulsen (2021); Jara-Díaz y Tirachini (2013); Batarce et al (2016); y estimaciones propias.

Para la misma Y , la distribución de los flujos entrantes de pax/hr de 1 a Γ es 120 a 4 ($\delta = 1$), 42,7 a 81,3 ($\delta = -1$) y 62 pax/parada ($\delta = 0$), como se muestra en la figura 2. En los tres casos el diseño óptimo resulta con la restricción de capacidad inactiva, como se muestra en las figuras 3 en el espacio (f, K) . La línea segmentada representa la restricción (15) y el área ensombrecida es el espacio factible; las curvas verde y roja representan las ecuaciones (20) y (21) (con $\mu = 0$) respectivamente; y las curvas azules representan diferentes niveles de la función objetivo

$VRC(f, K, R)$ para el valor óptimo de R encontrado en cada caso. Los valores de diseño óptimo (intersección de las curvas y mínimo VRC) son resumidos en la tabla 2 junto a los costos.

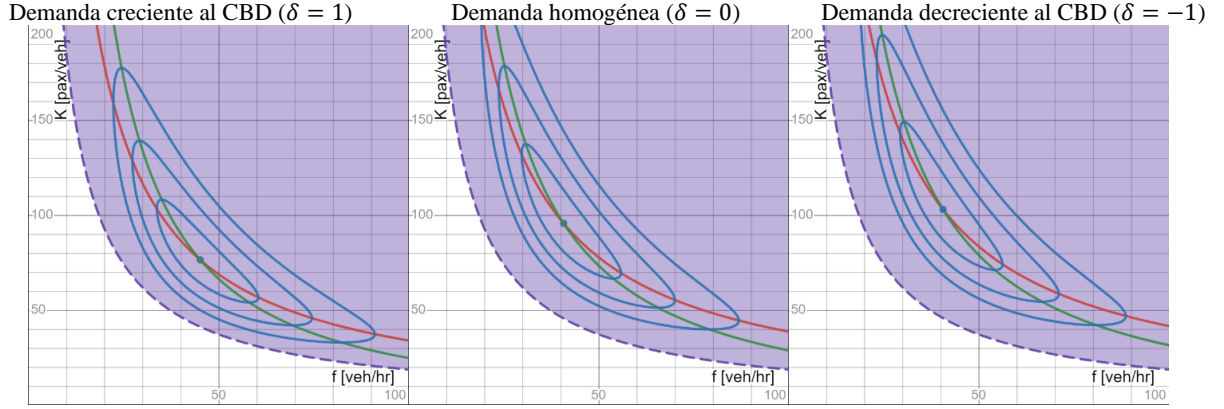


Figura 3. Diseño óptimo para R^* para tres distribuciones de demanda.

Tabla 2. Diseño óptimo para cada distribución de demanda.

δ	y pax/h	R^*	f^* veh/h	K^* pax/veh	C US\$/h	C_{op} US\$/h	C_u US\$/h
1	4	24	45,21	76,36	2831,85	1277,05	1554,80
0	2	29	40,86	95,56	3612,97	1643,13	1969,84
-1	1,33	29	40,69	102,92	3854,45	1733,59	2120,86

Como se espera, R^* crece a medida que la distribución de la misma demanda total cambia desde creciente a decreciente de Γ al CBD (δ varía de 1 a 0 a -1). Como la longitud del servicio aumenta con R^* , C_{op} pesa más y, mediante una disminución de f (lo que aumenta el tiempo de espera) y un aumento en K , el aumento en C_{op} es controlado. Sin embargo, el aumento en K es mayor que la disminución en f (moderando t_w); por ello la capacidad total Kf crece de 3452 a 3905 a 4188. Esto ocurre también porque cuando δ varía de 1 a 0 a -1, los flujos entrantes y_i en cada una de las paradas cercanas a Γ se hacen mayores (como se muestra en la figura 2); como estos son los viajes más largos, el flujo total en todos los arcos salvo el 1, crece, haciendo aumentar los factores de carga, lo que también hace aumentar P_v^i , haciendo que el tiempo en el vehículo pese más. Aumentar la capacidad de los buses contrabalancea esto al disminuir los factores de carga y consecuentemente P_v^i . Como resultado, el factor de carga en el arco más cercano al CBD – donde los 1860 pasajeros están a bordo – varía de 0,54 a 0,48 a 0,44 al variar δ de 1 a 0 a -1; P_v^1 varía de 4,68 a 4,26 a 3,98 US\$/h. Como se mencionó después de la ecuación (19), es P_{vc} lo que causa que la capacidad del sistema Kf sea mayor que el flujo total Y . El factor de carga ponderado resulta ser siempre 1/3 para toda distribución de demanda. Finalmente, rutas más largas reducen el tiempo de acceso.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2, se obtienen los costos marginales (totales), costos medios de los usuarios y tarifa óptima de los usuarios que parten en cada parada para las tres distribuciones de demanda (ver figura 4). El principal resultado es que las tarifas (óptimas) aumentan con la distancia de viaje, es decir, las tarifas obtenidas para pasajeros que abordan el sistema en paradas más cercanas al CBD son menores que las tarifas de los pasajeros más cercanos a la periferia, lo que tiene una explicación intuitiva.

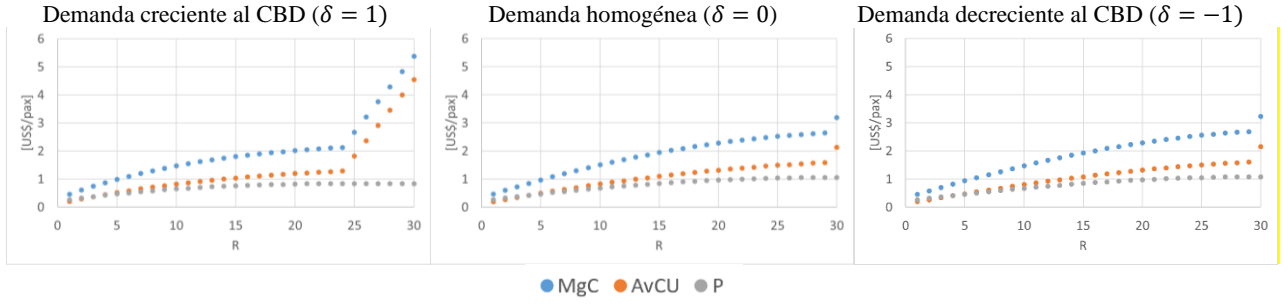


Figura 4. Tarifas óptimas para cada distribución de demanda.

Un pasajero extra en la parada i hace que la capacidad óptima del sistema Kf aumente a un valor $Kf+$ por lo que el factor de carga que multiplica P_{vc} disminuye de $\frac{\bar{Y}_j}{Kf}$ a $\frac{\bar{Y}_j}{Kf+}$ para todos los pasajeros que abordan aguas arriba, en una parada $j > i$, reduciendo su valor del tiempo en el vehículo. Esta externalidad positiva se vuelve más fuerte mientras más cerca del CBD se encuentre ese pasajero extra y mayor es el número de pasajeros aguas arriba. Notar que, los pasajeros que abordan más cerca del CBD hacen que el tiempo en el vehículo aumente para más pasajeros que aquellos que abordan más cerca de Γ (Mohring, 1972). La reducción en el valor debido al efecto hacinamiento, sin embargo, domina sobre el aumento por efecto de las subidas como muestra la forma del costo marginal del valor total del tiempo en el vehículo en la figura 5. Se muestra también que el costo marginal del operador crece con la distancia por una razón parecida: un usuario de larga distancia induce un Kf mayor porque causa un factor de carga más grande en más arcos que un usuario de corta distancia. Como se mostró en la sección 2, desde R^* a Γ los precios óptimos permanecen constantes porque la contribución del tiempo de acceso a los costos marginales totales es igual a la de los costos medios de los usuarios.

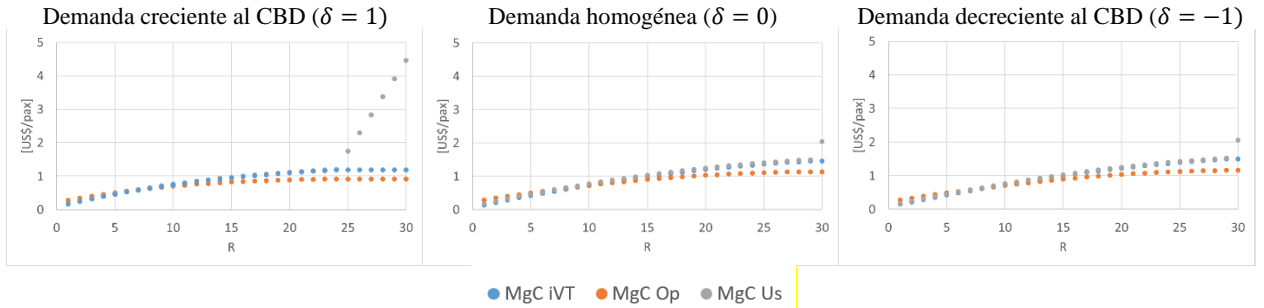


Figura 5. Costos marginales relevantes para diferentes distribuciones de demanda.

En la figura 5, el costo marginal del tiempo de espera – la diferencia entre el costo marginal total de los usuarios y el costo marginal del tiempo en el vehículo hasta la parada óptima – es despreciable. Numéricamente, los costos marginales de los operadores y del tiempo en vehículo, - los principales contribuyentes en el cálculo de la tarifa óptima - también crecen a tasas decrecientes.

El ingreso de los operadores debido a las tarifas $I^* = \sum P_i^* \cdot y_i$, su costo de operación y el posible subsidio $S^* = C_{op} - I^*$ se muestran en la tabla 3. El subsidio óptimo resulta estar entre un 10 y un 13% del costo de los operadores.

Tabla 3. Ingreso, costo de operadores y subsidio óptimos de cada distribución de demanda.

δ	$I^* [US\$/h]$	$C_{op} [US\$/h]$	$S^* [US\$/h]$
1	1119,34	1277,05	157,71
0	1468,61	1643,13	174,52
-1	1558,34	1733,59	175,25

La aplicación enfatiza el importante rol del parámetro de hacinamiento en el diseño óptimo, particularmente en el tamaño de vehículos teniéndose que el mayor factor de carga observado sea alrededor de 50%. Esto motiva a analizar en qué condiciones el sistema operará a capacidad.

5. EL PAPEL DEL PARÁMETRO DE HACINAMIENTO

Como se nota después de la ecuación (19), es el parámetro de hacinamiento P_{vc} el que hace posible que los buses no circulen llenos, es decir, que $K > Yf$. Si bien $P_{vc} = 0$ es una condición suficiente para que los vehículos operen a capacidad, no es una condición necesaria. Lo que debe ocurrir para que $\partial VRC / \partial K > 0$ es

$$\frac{\partial VRC}{\partial K} = c_1 \left[2fR \frac{l}{v} + (t_b + t_d)Y \right] - \frac{P_{vc}}{K^2} \left\{ \frac{Y^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] + \sum_{i=2}^R \frac{\bar{Y}_l^2}{f} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \right\} > 0 \quad (31)$$

$$c_1 \left[2R \frac{l}{v} + (t_b + t_d) \frac{Y}{f} \right] > P_{vc} \left\{ \frac{Y^2}{f^2 K^2} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_d}{2f} Y \right] + \sum_{i=2}^R \frac{\bar{Y}_l^2}{f^2 K^2} \left[\frac{l}{v} + \frac{t_b}{f} y_{i-1} \right] \right\} \quad (32)$$

De las ecuaciones (5) y (9) obtenemos

$$c_1 > P_{vc} \left\{ \left(\frac{Y}{fK} \right)^2 t_v^1 + \sum_{i=2}^R \left(\frac{\bar{Y}_l}{fK} \right)^2 t_v^i \right\} / t_c = P_{vc} \sum_{i=2}^R \left(\frac{\bar{Y}_l}{fK} \right)^2 t_v^i / t_c \quad (33)$$

Pero $\sum_{i=1}^R t_v^i$ es el tiempo en el vehículo de un pasajero que aborda en la parada R, el que es siempre menor que t_c . Como el factor $\left(\frac{\bar{Y}_l}{fK} \right)^2$ sólo reduce la suma (en todos los arcos $\frac{\bar{Y}_l}{fK} \leq 1$), para que la restricción de capacidad sea activa debe cumplirse $P_{vc} < \frac{c_1}{\alpha}$ con $\alpha = \sum_{i=2}^R \left(\frac{\bar{Y}_l}{fK} \right)^2 t_v^i / t_c \ll 1$ pero desconocido (depende de la solución óptima). Examinamos esto numéricamente mediante un análisis de sensibilidad en P_{vc} mostrando los resultados en la tabla 4.

Tabla 4. Efecto de P_{vc} en el diseño óptimo para las tres distribuciones de demanda.

	Demanda creciente al CBD ($\delta = 1$)			Demanda homogénea ($\delta = 0$)			Demanda decreciente al CBD ($\delta = -1$)		
P_{vc}	R^*	f^*	K^*	R^*	f^*	K^*	R^*	f^*	K^*
0	26	34,69	53,62	30	32,31	57,56	30	32,31	57,57
1,3	25	38,18	48,72	30	34,92	53,27	30	34,92	53,27
2	25	39,61	46,96	29	36,63	57,10	30	35,94	61,40
4	25	41,97	61,14	29	38,70	76,35	29	38,57	82,15
7	24	45,21	76,36	29	40,86	95,56	29	40,69	102,92

f^* es en veh/h, K^* es en pax/veh. $P_{ve} = 0,9$

Verificamos que para $P_{vc} > 2,2$ el resultado para las tres distribuciones es $Kf > Y$. Similarmente, si $P_{vc} \leq 1,3$ entonces $Kf = Y$ para las tres distribuciones de demanda (lo que significa $\alpha = 0,23$). Incluimos el caso intermedio con $P_{vc} = 2$ donde la restricción de capacidad es activa para $\delta = 1$ y no-activa para las otras dos distribuciones. Notar que K^* decrece con P_{vc} hasta que la restricción se vuelve inactiva, aumentando a partir de allí en respuesta al aumento de la importancia de P_{vc} . ¿Qué ocurre con las tarifas óptimas? En la figura 6 mostramos que los resultados para el caso límite $P_{vc} = 1,3$; las tarifas óptimas aumentan con la distancia, pero notablemente menos que en la figura 4. Recordando que la variación de las tarifas óptimas con la distancia – creciente a tasas decrecientes – fue explicada por efecto del hacinamiento ¿qué ocurre cuando P_v^i es constante?

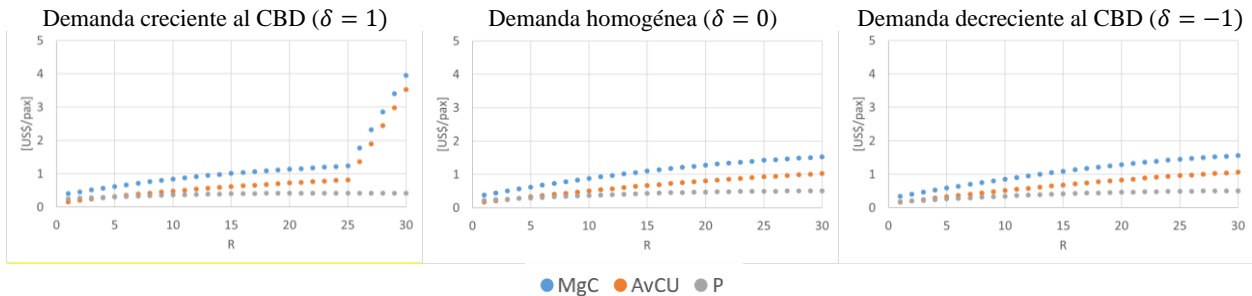


Figura 6. Precios óptimos para cada distribución de demanda ($P_{ve} = 0,9$ y $P_{vc} = 1,3$).

Si el efecto del hacinamiento no es considerado debemos dar un valor razonable al P_v^i , el cual debe ser menor que P_w y P_a y en entre los valores extremos $0,9$ ($P_v^i = P_{ve}$) y $7,9$ ($P_v^i = P_{ve} + P_{vc}$); como el factor de carga promedio ponderado considerando el hacinamiento fue cercano a $1/3$ para todas las distribuciones de demanda, elegimos $P_v^i = P_{ve} + P_{vc}(1/3) = 3,23$ como ese valor razonable; los resultados en la tabla 5 sintetizan el diseño óptimo y las consecuencias financieras para las tres distribuciones de demanda. Puede verificarse que $Kf = Y$ en todos los casos. Las tarifas óptimas se muestran en la figura 7.

Tabla 5. Diseños, costos y subsidios sin considerar el efecto del hacinamiento ($P_v^i = 3,23$).

δ	R^*	f^* [veh/h]	K^* [pax/veh]	C [US\$/h]	C_{op} [US\$/h]	C_u [US\$/h]	I^* [US\$/h]	S^* [US\$/h]
1	25	41,78	44,52	2367,11	858,24	1508,86	687,41	170,83
0	29	38,85	47,88	2977,83	964,90	2012,93	781,17	183,73
-1	30	38,20	48,69	3152,45	991,22	2161,23	804,38	186,84

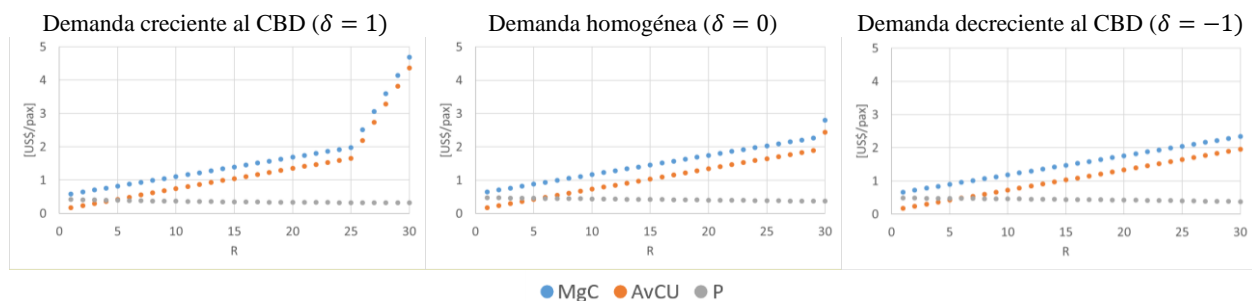


Figura 7. Tarifas óptimas para diferentes distribuciones de demanda sin considerar el efecto del hacinamiento ($P_v^i = 3,23$).

Comparando las tablas 3 y 5, cuando el hacinamiento no es considerado, el subsidio absoluto aumenta menos de un 10% (cerca de 13 US\$/h) en todos los casos. Sin embargo, como los C_{op} caen cerca de un 45% - principalmente debido a la importante reducción de K - la proporción de subsidio relativo al costo casi se duplica. Este importante aumento relativo de los subsidios cuando P_v^i es considerado constante no es sorprendente: como se discutió antes, en este caso, la principal fuente de externalidades negativas dependientes de la distancia de viaje - relacionada con P_{vc} - desaparece, haciendo que la tarifa óptima sea muy pequeña y casi constante (independiente de la distancia) como se muestra en la figura 7. Así, el efecto hacinamiento desaparece mientras que el efecto de las subidas (Mohring, 1972) permanece, haciendo que las tarifas óptimas decrezcan (levemente) con la distancia.

Como se observa en la ecuación (19) el parámetro de hacinamiento no es el único responsable de que K^* sea mayor al mínimo necesario para transportar Y . El costo de K reflejado por c_1 también juega un rol. Esto coincide con lo que Jara-Díaz y Gschwender (2003) encuentran: lo que importa es la diferencia relativa entre P_{vc} y c_1 . Así, si $c_1 < P_{vc}$ la restricción de capacidad no es activa y el factor de carga es constante e igual a c_1/P_{vc} . En el modelo aquí presentado, el factor de carga varía con la distancia y la condición impuesta por la ecuación (19) es bastante más compleja. Dado que el parámetro c_1 puede ser (y ha sido) estimado sobre una base más sólida que el parámetro de hacinamiento, en discusión en la literatura reciente, la sensibilidad sobre P_{vc} es más relevante y apunta hacia una importante línea de investigación.

6. CONCLUSIONES

Esta investigación contribuye a la discusión acerca del efecto que la distancia viajada tiene sobre el diseño y la tarificación óptima del transporte público. Considerando un corredor y la distribución espacial de los viajes al CBD se presenta y aplica un modelo estilizado de una línea de buses cuya longitud, frecuencia y capacidad del vehículo se diseñan para minimizar el valor de los recursos consumidos al que aportan operadores y usuarios (tiempo). A partir de la función de costos así obtenida se calculan las tarifas óptimas que resultan crecer con la distancia a tasas decrecientes. El hacinamiento causado por los usuarios que entran al sistema en distintos puntos del corredor juega un papel muy importante en este resultado, pues el valor del tiempo en el vehículo crece con la tasa de ocupación a través de un parámetro que multiplica al grado de ocupación, el que varía diferencialmente por tramos dependiendo de donde parte el flujo. Finalmente, es el elemento que gatilla tarifas óptimas que crecen con la distancia viajada, y factores de ocupación menores que 1. La longitud del servicio crece a medida que la demanda se concentra en la periferia.

El hacinamiento actúa sobre las tarifas a través del impacto sobre las condiciones de viaje, las que se ven influidas a partir de dos tipos de externalidades de signo opuesto. Las subidas y bajadas de los usuarios de corta distancia aumentan el tiempo en el vehículo de los de larga distancia, pero el aumento de los primeros hace crecer la capacidad y bajar la tasa de ocupación (el hacinamiento) que experimentan los segundos, disminuyendo el valor de su tiempo en el vehículo. En las simulaciones con datos tipo Santiago la segunda externalidad domina a la primera provocando menores tarifas en viajes cortos y que los vehículos nunca vayan llenos. La conveniencia de vehículos grandes producto del efecto hacinamiento provoca aumento del costo de los operadores, lo que explica por qué lo relevante es el costo relativo de la capacidad adicional versus el valor del

parámetro de hacinamiento en el valor del tiempo en el vehículo. El costo marginal por capacidad ha sido estimado para varias tecnologías y admite poca discusión, no así el parámetro de hacinamiento que aún es sujeto de investigación. La sensibilidad sobre el parámetro de hacinamiento muestra que valores bajos pueden generar vehículos llenos en el tramo cercano al CBD con tarifas óptimas que crecen poco con la distancia. Si no se considerase hacinamiento la restricción de capacidad es siempre activa, las tarifas casi no dependen de la distancia, y la razón subsidio/costo de operadores crece significativamente.

El modelo admite mejoras y extensiones, comenzando por un análisis de escala, ya que el hacinamiento es una externalidad negativa a diferencia de las provocadas por el aumento de la frecuencia o la disminución del espaciamiento entre líneas¹. También es de interés examinar estructuras alternativas de línea pues puede haber otros arreglos que pudiese ser superiores a una línea de periferia a centro, por ejemplo, dos líneas con una sirviendo hasta un cierto paradero y otra llevando a los restantes pasajeros (entre ese paradero y a periferia) directamente al CBD o al paradero de conexión. Sin agotar la lista, el estudio de otras distribuciones de demanda, admitiendo incluso destinos distintos al CBD, sería deseable.

La formulación, solución y análisis de resultados de un modelo estilizado para la tarificación por distancia como el aquí presentado muestra novedades metodológicas que sugieren que el hacinamiento es un elemento relevante para el diseño y tarificación óptimos de sistemas de transporte público, lo que hace de su estudio un objeto prioritario de investigación.

AGRADECIMIENTOS

Investigación financiada parcialmente por proyectos Fondecyt 1200157, y ANID AFB220003.

REFERENCIAS

Bandegani, M. and Akbarzadeh, M. (2016). Evaluation of Horizontal Equity under a Distance-Based Transit Fare Structure. **Journal of Public Transportation**, **19**, 161-172.

Batarce, M., Muñoz, J.C. and Ortúzar, J. de D. (2016). Valuing crowding in public transport: Implications for cost-benefit analysis. **Transportation Research Part A**, **91**, 358-378.

Brown, A. (2018). Fair fares? How flat and variable fares affect transit equity in Los Angeles. **Case Studies on Transport Policy**, **6**, 765-773.

Cervero, R. (1981). Flat versus differentiated transit pricing: what's a fair fare? **Transportation**, **10**, 211-232.

Huang, D., Liu, Z., Liu, P. and Chen, J. (2016). Optimal transit fare and service frequency of a nonlinear origin-destination based fare structure. **Transportation Research Part E**, **96**, 1-19.

¹ Considerando el hacinamiento como fuente de externalidades negativas, Qin (2014) observó que esto podría contrabalancear las externalidades positivas causadas por la reducción en el tiempo de espera (el efecto Mohring).

Jansson, J. O. (1979). Marginal cost pricing of scheduled transport services. **Journal of Transport Economics and Policy**, **13**, 268-294.

Jansson, J. O. (1980). A simple bus line model for optimization of service frequency and bus size. **Journal of Transport Economics and Policy**, **14**, 53–80.

Jansson, J. O. (1984). Transport System Optimization and Pricing. **John Wiley & Sons, Chichester**.

Jansson, K. (1993). Optimal public transport price and service frequency. **Journal of Transport Economics and Policy**, **27**, 33–50.

Jara-Díaz, S. and Gschwender, A. (2003). Towards a general microeconomic model for the operation of public transport. **Transport Reviews**, **23**, 453–469.

Jara-Díaz, S. and Gschwender, A. (2009). The effect of financial constraints on the optimal design of public transport services. **Transportation**, **36**, 65-75.

Jara-Díaz, S. and Muñoz-Paulsen, E. (2021). Lessons from the strategic design of a bimodal public transport system on a linear city. **Research in Transportation Economics**, **101167**.

Jara-Díaz, S. and Tirachini, A. (2013). Urban bus transport: open all doors for boarding. **Journal of Transport Economics and Policy**, **47**, 91-106.

Jørgensen, F. and Pedersen, P. A. (2004). Travel distance and optimal transport policy, **Transportation Research Part B**, **38**, 415-430.

Kerin, P. D. (1992). Efficient bus fares. **Transport reviews**, **12**, 33-47.

Kraus, M. (1991). Discomfort externalities and marginal cost transit fares. **Journal of Urban Economics**, **29**, 249-259.

Mohring, H. (1972). Optimization and scale economies in urban bus transportation. **American Economic Review**, **62**, 591-604.

Qin, F. (2014). Investigating the In-Vehicle Crowding Cost Functions for Public Transit Modes. **Mathematical Problems in Engineering**, **Volume 2014**, Article ID 502708, 1–13.

Tian, Q., Huang, H.-J. and Yang, H. (2007). Equilibrium properties of the morning peak-period commuting in a many-to-one mass transit system. **Transportation Research Part B**, **41**, 616–631.

Tirachini, A., Hensher, D. and Rose, J. (2014). Multimodal pricing and optimal design of urban public transport: The interplay between traffic congestion and bus crowding. **Transportation Research Part B**, **61**, 33–54.

Tsai, F.M., Chien, S. and Spasovic, L. N. (2008). Optimizing distance-based fares and headway of an intercity transportation system with elastic demand and trip length differentiation. **Transportation Research Record**, **2089**, 101-109.

Turvey, R. and Mohring H. (1975). Optimal bus fares. **Journal of Transport Economics and Policy**, **9**, 319-327.